Παραδείγματα

1) Ένα κομοδίνο αποτελείται από 2 συρταριέρες. Το πρώτο συρτάρι έχει 3 βιβλία και 8 CD. ~~[illegible]~~ Στο δεύτερο 6CD και 4 τσιγάρα.

α. P(βιβλίο) = ? = P(B)

β. P(CD) = ?

Λύση

- B_1 = { Διαλέξω 1° συρτάρι }

  B_2 = { Διαλέξω 2° συρτάρι }

~~[illegible]~~

α. $P(B) = P(B/B_1)P(B_1) + P(B/B_2)P(B_2) =$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{22}$$

β. $P(CD) = P(CD/B_1)\,P(B_1) + P(CD/B_2)P(B_2) =$

$$= \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0,6636$$

2) (Πρόβλημα κλειδιών)

Από ν κλειδιά ένα μόνο είναι κατάλληλο για την πόρτα. Τα κλειδιά δοκιμάζονται το ένα μετά το άλλο χωρίς να ~~[illegible]~~ χρησιμοποιείται κλειδί δύο φορές.

P(το σωστό κλειδί να χρησιμοποιηθεί στην κ-δοκιμή) = ?

$\kappa = 1, 2, \dots, n$

Λύση

Έστω A_i = {το σωστό κλειδί επιλέγεται στην i-δοκιμή}

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \, A_k) = P(A_1^c)\, P(A_2^c / A_1^c)\, P(A_3^c / A_1^c A_2^c) \dots P(A_k / A_1^c \dots A_{k-1}^c)$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

Κανόνας ή Νόμος Bayes

Έστω χώρος πιθανότητας $(S, \mathcal{A}, P)$ και $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ μια διαίρεση του S με $P(B_i) > 0$. Τότε αν $A \in \mathcal{A}$ ισχύει :

$$P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i)\, P(B_i)}{P(A)} \underset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} \frac{P(A | B_i)\, P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / B_i)\, P(B_i)} \qquad i = 1, \dots, n$$

Απόδειξη

$$P(B_i / A) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A / B_i)\, P(B_i)}{P(A)} \underset{\text{ΘΟΠ}}{=} \frac{P(A / B_i)\, P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / B_i)\, P(B_i)}$$

Παραδείγματα

1) Έστω ένα άσπρο και ένα κόκκινο νόμισμα. Η πιθανότητα κεφαλής στο άσπρο νόμισμα είναι $\frac{1}{2}$ ενώ η πιθανότητα κεφαλής στο κόκκινο είναι $\frac{1}{3}$.

α. Ένα νόμισμα επιλέγεται στην τύχη και ρίχνεται μια φορά. P(να εμφανιστεί K) = ? = P(K)

β. Ένα νόμισμα επιλέγεται στην τύχη, ρίχνεται και εμφανίζεται κεφαλή. P(να επιλεχθεί το κόκκινο νόμισμα) = ?

Λύση

Έστω $A_1 = \{$επιλέγω Άσπρο$\}$

$A_2 = \{$επιλέγω Κόκκινο$\}$

α) $P(K) = P(K/A_1)\,P(A_1) + P(K/A_2)\,P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

β. $P(A_2/K) = \dfrac{P(K/A_2)P(A_2)}{P(K)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{5/12} = \dfrac{6}{15}$

2) Για την διάγνωση μιας λοιμώδης ασθένειας γίνεται ένα διαγνωστικό τεστ το οποίο είναι θετικό στο 80% των περιπτώσεων που ένα άτομο πάσχει πράγματι από την ασθένεια και στο 10% των περιπτώσεων που ένα άτομο δεν πάσχει από την ασθένεια. Έστω επίσης ότι 1% του πληθυσμού παρουσιάζει την ασθένεια. Ένα άτομο

υποβάλλεται στο διαγνωστικό τεστ. Ποια η πιθανότητα:

α. Το άτομο να είναι θετικό ?

β. Το άτομο να έχει την ασθένεια δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό ?

Λύση

$B_1 = \{$κάποιος έχει ασθένεια$) \rightsquigarrow P(B_1) = 1\%$

$B_2 = \{$κάποιος δεν έχει ασθένεια$) \rightsquigarrow P(B_2) = 1 - P(B_2^c) = 1 - P(B_1) =$
$= 99\%$

$P(A / B_1) = 80\%$

$P(A / B_2) = 10\%$

α. $P(\text{θετικό}) = P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) =$

$= 0{,}8 \times 0{,}01 + 0{,}1 \times 0{,}99 = 0{,}107$

β. $P(B_1 / A) = \dfrac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}01}{0{,}107} = 0{,}075 = 7{,}5\%$

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Διαπιστώσατε ότι $P(A/B) > P(A)$ ή $P(A/B) < P(A)$

Υπάρχουν και περιπτώσεις που $\boxed{P(A/B) = P(A)}$

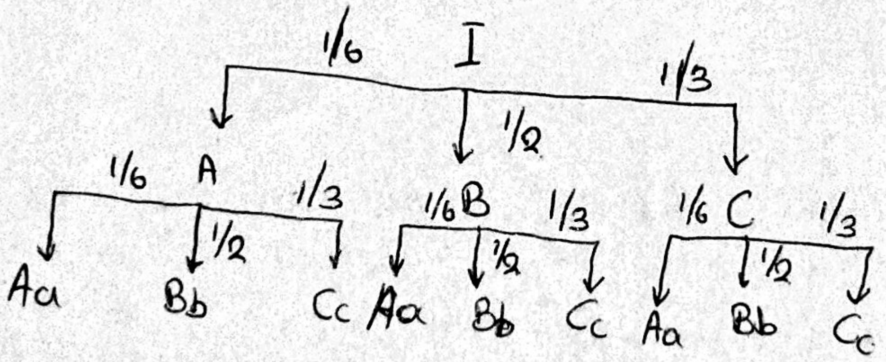
Παράδειγμα

Ένας ιός I μπορεί να μεταλλαχθεί σε ιούς A, B, C με πιθανότητες $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Οι ίδιες πιθανότητες ισχύουν οι μεταλλαγμένοι ιοί να μεταλλαχθούν σε Aa, Bb, Cc

α. P(ο I να μεταλλαχθεί σε Bb)

β. Δεδομένου ότι ο I μεταλλάχθηκε σε Bb ποια η πιθανότητα η πρώτη μετάλλαξη να είναι C

Λύση



α. $P(Bb) = P(Bb/A)P(A) + P(Bb/B)P(B) + P(Bb/C)P(\cancel{A}C) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

β. $P(C/Bb) = \dfrac{P(Bb/C)\,P(C)}{P(Bb)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1/2} = \dfrac{1}{3}$

Επίσης $P(C) = \frac{1}{3}$

Παρατηρώ ότι $P(C/Bb) = \frac{1}{3} = P(C)$

- Αν $P(A|B) = P(A)$ τότε το B δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του A ή το A δεν εξαρτάται από το B ή τα A και B είναι ανεξάρτητα

- Αν $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$ τα A, B είναι ανεξάρτητα

- Αν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ – " –

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Αν για δυο ενδεχόμενα A και B ισχύει $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ τότε τα A και B ονομάζονται ανεξάρτητα.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Θα λέμε ότι τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots A_n$ αν για κάθε υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ του $\{1,2, \dots n\}$ $k=2, \dots n$ ισχύουν οι ισότητες $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (Ανεξαρτησίας 3 - ενδεχομένων)

Τα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα αν ισχύουν όλες οι ισότητες.

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A\cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma)$$
$$P(B\cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma)$$
$$P(A\cap B\cap \Gamma) = P(A)P(B)\cdot P(\Gamma)$$

Παραδείγματα.

Ένα νόμισμα ρίχνεται 3 φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A_i = \{$το αποτέλεσμα της i-ρίψης είναι $K\}$ $i=1,2,3$

Είναι τα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα.

Λύση

Για να είναι ανεξάρτητα θα πρέπει:

- $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)$
- $P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3)$
- $P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$
- $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$S = \{ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ\}$

$P(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = P(A_3) = P(A_1) = \frac{1}{2}$

$P(A_1 A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_2 A_3) = P(A_1 A_3)$

$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{8}$

Όλες οι ισότητες ισχύουν άρα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

Παρατήρηση

α) Ενδεχόμενα που σχετίζονται με διαφορετικές επαναλήψεις της ίδιας διαδικασίας (ρίψη νομίσματος, ζαριού) είναι ανεξάρτητα.

β) Η ανεξαρτησία (αν ισχύει) δίνει τρόπο υπολογισμού πιθανότητας τομής πολλών ενδεχομένων.

Παράδειγμα

Ένα νόμισμα με πιθανότητα εμφάνισης Γράμματα $P(\Gamma) = p$ ρίχνεται n φορές. P(εμφάνισης τουλάχιστον μιας φοράς της όψης γράμματα) $= ?$

$0 < p < 1$

Λύση

$$P(\text{τουλάχιστον μια φορά } \Gamma) = 1 - P(\text{καμιά φορά } \Gamma) =$$

$$1 - P(\overbrace{K\,K \ldots K}^{n\text{-φορές}}) \xlongequal[\text{ενδεχόμενα}]{\text{ανεξάρτητα}} 1 - \overbrace{P(K)\,P(K) \ldots P(K)}^{n \text{ φορές}} =$$

$$= 1 - P(K)^n = 1 - (1-p)^n$$